

文章编号:1000-8055(2012)08-1738-08

# 单圆盘转子非线性振动模型及机理

杨金福, 伍 敏

(中国科学院 工程热物理研究所, 北京 100190)

**摘 要:** 根据转子非线性振动的力学性质及大变形假设, 结合工程实际构建了转子非线性振动具有 Duffing 方程形式的力学模型, 推导了非线性系统的等效频率和频响方程, 研究了刚度元件、阻尼元件与非线性元件对系统振动的影响. 通过单圆盘转子非线性振动实验, 验证了非线性振动模型结构与 Duffing 方程求解及频响方程的合理性及有效性, 揭示了共振、突变、滞后等非线性现象的机理, 为转子振动特性分析提供了一种新的研究方法.

**关 键 词:** 非线性振动模型; Duffing 方程; 单圆盘转子; 非线性频率; 频响方程; 研究方法

**中图分类号:** V231.92; O322

**文献标志码:** A

## Single-disc rotor nonlinear vibration model and mechanism

YANG Jin-fu, WU Min

(Institute of Engineering Thermophysics,  
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

**Abstract:** Based on mechanical properties of rotor nonlinear vibration and the assumption of large deformation, the rotor nonlinear vibration model in the form of Duffing equation was constructed from typical engineering problem. According to analytical solutions of Duffing equation, system's equivalent frequency and frequency response equation were derived. The system's vibration influences of stiffness components, damping components and nonlinear components were studied. The single-disc rotor nonlinear vibration experimental results verified the rationality and efficiency of nonlinear vibration model's construction and Duffing equation's analytical solution and frequency response equation. The mechanisms of resonance, amplitude jump and hysteresis are revealed. It provides a new research method for rotor vibration characteristics analysis.

**Key words:** nonlinear vibration model; Duffing equation; single-disc rotor;  
nonlinear frequency; frequency response equation; research method

振动是物体经过平衡位置附近所作的微小或有限的往复运动, 例如声波、机械振动、电磁振荡等. 尽管振动现象的形式多种多样, 但有着共同的频率、振幅、相位特征及其客观规律和统一的数学表达形式, 因此能够建立统一的理论来进行研究. 转子动力学是以轴系运动为基础, 以各种旋转机械为工程背景, 重点研究转子动力与运动行为关

系及其规律的一门学科. 转子系统在运行过程中的振动信息和行为特性是反映系统整体及其变化规律的主要信号. 通过数据采集和各种频谱分析、耦合分析<sup>[1-2]</sup>、小波分析<sup>[3]</sup>等动态信号的处理, 能够深入了解转子整体和局部的运转机理, 保障设备正常运行, 防止突发事件.

通常人们在研究转子非线性振动问题时, 由

收稿日期: 2011-09-14

网络出版地址: [http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20120830.1200.201208.1738\\_009.html](http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20120830.1200.201208.1738_009.html)

作者简介: 杨金福(1961—), 男, 黑龙江哈尔滨人, 研究员, 博士, 从事热动力装置及热力循环系统等研究.

于非线性微分方程尚无普遍有效的求解方法而线性常微分方程的数学理论已十分完善,往往将复杂的非线性振动直接纳入到线性理论框架中,用线性理论得出的结果不仅误差过大,而且对自激振动、共振、超调和次谐振动、突变、滞后等实际工程中频繁出现的问题无法做出全面合理的解释。因此针对转子系统普遍存在的非线性因素,需要建立相应的非线性振动模型。

转子非线性的机理研究在国内外文献中并不多见。在基于非线性项的非线性振动模型研究方面,Czolczynski等<sup>[4]</sup>考虑了包含非线性立方刚度的双阱势 Duffing 振子弹性模型在周期激励和随机激励作用下的响应,并在数值计算结果中讨论了诸如分岔、混沌等非线性振动现象产生同步的原因。张根辈等<sup>[5-7]</sup>指出线性模型的局限性,把系统的非线性因素作为确定因素进行振动识别,建立非线性立方刚度、非线性平方阻尼以及参数不确定性的三自由度模型,进行常位移和常速度测试识别非线性参数,并用于结构的最大响应预测,分析非线性因素对结构动力的影响。在转子系统应用方面,李宏坤等<sup>[8]</sup>考虑了非线性立方刚度、非线性油膜力等因素下的转子轴承系统松动模型,通过数值计算结果表明了该建模方法在转子松动故障诊断的可行性。张锁怀等<sup>[9]</sup>在研究转子-轴承系统时,根据齿轮啮合非线性刚度、轴承非线性油膜力及齿侧间隙推导了齿轮耦合的转子-轴承系统的非线性动力学模型。袁振伟等<sup>[10]</sup>考虑了同时反映涡轮径向偏心和轴向偏斜的非线性流体激振力模型,并与 Alford 力模型比较,通过数值计算结果反映了非线性模型的有效性和可靠性。马锐等<sup>[11]</sup>在有裂纹的情况下,考虑了非线性时变刚度、非线性间隙及传动误差的影响,从庞加莱映射图、频谱图等综合分析了齿轮裂纹的演化过程及对系统动力学分岔响应的影响,进行了齿轮箱的裂纹故障诊断。李明等<sup>[12]</sup>考虑了非线性油膜力等因素,建立了多跨转子非线性动力学模型,并用数值方法研究了系统的分岔、混沌等非线性动力学行为。此外,郭虎伦等<sup>[13]</sup>采用解析分析的方法,对含有非线性立方刚度和非线性间隙的二元机翼进行分析,得到硬弹簧、软弹簧特性下机翼在颤振点的不同分岔情况。王莉等<sup>[14]</sup>建立了磁链的非线性模型,并验证了非线性模型的有效性。

转子在大变形情况下的实际振动都具有非线性性质。目前学者一般采用小变形假设,把转子系统中的各种非线性变化简化成线性因素,建立线

性模型进行分析,这类线性模型由于进行了大量的简化,模型计算的结果与实际产生了很大误差,同时对于工程中的一些非线性现象无法做出合理的解释。因此,本文基于大变形、硬弹簧特性来描述非线性支承刚度,从而建立转子振动的非线性模型,并且开展了相应的实验研究。

## 1 非线性振动简化模型

一般说来,在实际应用中,机械振动工程问题都属于非线性问题。根据力学原理及其变化规律,构建惯性、弹性、阻尼与激励等不同力相互作用的数理模型,从而得到相应的非线性方程,通过方程的解就可以揭示各种非线性现象产生的机理。

阻尼元件考虑线性阻尼性质,即  $f_c = -cv$ ,其中负号表示阻尼力的方向与物体运动的速度方向相反。弹性元件考虑非线性弹簧特性,即非线性弹性恢复力<sup>[15]</sup>为

$$f_k = -kx - \eta x^3 \quad (1)$$

当  $\eta = 0$  时,变形与作用力成正比,即满足胡克定律的线性规律,称为线性弹簧特性;当  $\eta > 0$  时,随着变形增加弹性系数逐渐增大,称为硬化弹簧特性;当  $\eta < 0$  时,随着变形增加弹性系数逐渐减小,称为软化弹簧特性<sup>[16]</sup>。从图 1 可以看出,在小位移变形  $[b, a]$  区间,弹性变形遵循胡克定律的线性规律,即  $f_k = -kx$ ;在大位移变形  $(-\infty, b) \cup (a, +\infty)$  区间,弹性变形满足非线性规律,  $f_k = -kx - \eta x^3$ ,其中  $k$  为线性弹性变形系数,简称为线性系数; $\eta$  定义为非线性弹性变形系数,简称为非线性系数。

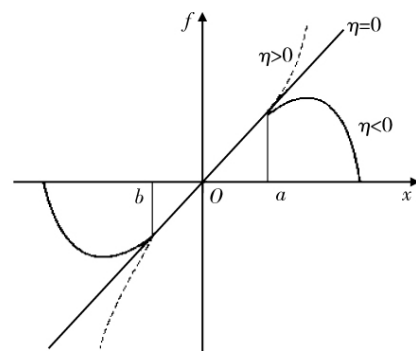


图1 非线性弹性恢复力

Fig. 1 Nonlinear elastic restoring force

在工程实际中,应用惯性、弹性、阻尼与激励等元件的力学性质,就能够进行非线性模型简化如图 2 所示,质点  $m$  振动的惯性力元件为  $m\ddot{x}$ ,线性弹性恢复力元件为  $kx$ ,非线性弹性恢复力元件

为  $\eta x^3$ , 阻尼元件为  $c\dot{x}$ , 外部激励元件为  $F(t)$ . 根据牛顿第二定律, 得出质点  $m$  的动力方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \eta x^3 = F(t) \quad (2)$$

显然, 该方程就是典型 Duffing 方程<sup>[15]</sup>的有阻尼硬弹簧形式<sup>[17]</sup>, 因此可以应用 Duffing 方程结构与解的表达式来分析非线性振动的机理, 从而揭示其振动规律. 当忽略非线性元件时, 方程(2)退化为常见的小位移变形时的线性振动方程  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$ , 该方程只在小位移变形  $[b, a]$  区间成立, 具有一定的适用局限性, 换言之, 该方程是非线性振动方程(2)在  $\eta = 0$  时的特例, 非线性振动方程(2)具有更广阔的适用范围.

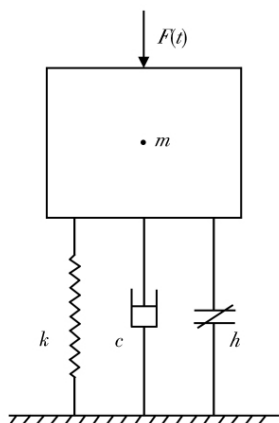


图 2 非线性振动简化模型

Fig. 2 Simplified nonlinear vibration model

## 2 转子非线性振动模型

传统的 Jeffcott 转子分析模型大多数都基于小扰动、小变形的假设, 并且弹性变形满足胡克定律. 但是, 随着近代旋转机械逐步向高转速、轻结构、大柔性方向发展, 转子挠性偏离运动已超出了小扰动范围, 并且振动普遍存在一些非线性特征, 因此迫切需要结合工程实际问题建立适合大扰动、大偏心(位移)条件的理论分析模型, 从而进一步揭示转子非线性振动机理及变化规律.

在图 3 的转子系统受力分析中, 转轴的质量忽略不计, 考虑圆盘两端轴及轴承的弹性支承具有大变形、硬弹簧的特性. 设单圆盘质量为  $m$ , 偏心距为  $e$ , 转子以频率  $\Omega$  逆时针转动, 圆盘的惯性力元件在  $x, y$  轴上的分量为  $m[x + e\cos(\Omega t)]''$ ,  $m[y + e\sin(\Omega t)]''$ , 阻尼元件在  $x, y$  轴上的分量为  $c\dot{x}$ ,  $c\dot{y}$ , 圆盘受到的弹性恢复力元件在  $x, y$  轴上的分量为  $kx + \eta x^3$ ,  $ky + \eta y^3$ . 根据牛顿第二定律, 可列出转子偏心振动在  $x, y$  轴方向上的动力

方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \eta x^3 = m\Omega^2 e\cos(\Omega t) \quad (3)$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + \eta y^3 = m\Omega^2 e\sin(\Omega t) \quad (4)$$

由此可见, 转子非线性振动方程能够化成 Duffing 方程的有阻尼硬弹簧形式. 方程两边同时除以质量  $m$ , 并对各系数做如下代换:

$$\begin{cases} c/m = 2\mu, k/m = \omega_0^2 \\ \eta/m = \epsilon\beta_0^2 (\epsilon \rightarrow 0) \end{cases} \quad (5)$$

则方程可以写成

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon\beta_0^2 x^3 = \Omega^2 e\cos(\Omega t) \quad (6)$$

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega_0^2 y + \epsilon\beta_0^2 y^3 = \Omega^2 e\sin(\Omega t) \quad (7)$$

式中  $\Omega^2 e$  为激励的幅值, 与转子转动频率  $\Omega$  及偏心距  $e$  有关,  $\mu$  表示阻尼比,  $\omega_0$  表示固有频率,  $\epsilon$  表示小参数特性系数. 由于转子非线性振动模型在  $x, y$  方向上是类似的, 所以本文以下都按照  $x$  方向的振动方程进行讨论.

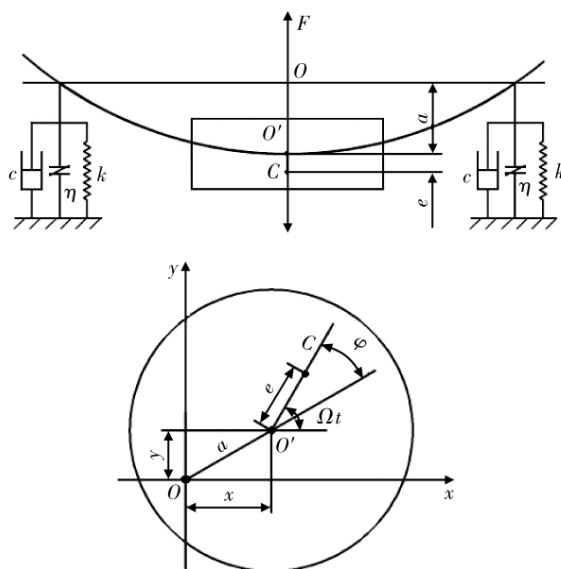


图 3 转子受力分析图

Fig. 3 Rotor force analysis

在转子非线性轴承油膜力<sup>[18-19]</sup>、非线性挤压油膜力<sup>[20-21]</sup>、非线性裂纹转子、非线性碰摩、非线性刚度支承、非线性磁轴承力等的研究中发现大量的分岔与混沌现象都是通过倍周期分岔、Hopf 分岔、周期 3 分岔和阵发等道路进入或退出混沌, 这些现象基本没有超出对单自由度非线性 Duffing 方程的分析结果.

## 3 解析分析

没有阻尼元件消耗能量时方程(6)为保守系统, 不考虑外界激励时, 转子非线性振动的 Duffing 方程可以写为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon \beta_0^2 x^3 = 0 \quad (8)$$

用多尺度法推导方程(8)的解<sup>[16]</sup>,作为最低级的近似,将  $\eta/m = \varepsilon \beta_0^2$  代入,可求得系统的等效频率为

$$\omega = \omega_0 + \frac{3a^2}{8m\omega_0}\eta \quad (9)$$

定义  $\omega_\eta = \frac{3a^2}{8m\omega_0}\eta$  为非线性频率,它具有系统非线性结构的频响特性,则系统等效频率可以化为

$$\omega = \omega_0 + \omega_\eta \quad (10)$$

显然,系统等效频率是由线性频率(固有频率)  $\omega_0$  与非线性频率  $\omega_\eta$  两部分组成. 无论硬弹簧特性 ( $\eta > 0$ ) 还是软弹簧特性 ( $\eta < 0$ ) 都是周期运动,只是求得的系统等效频率  $\omega$  比  $\omega_0$  偏大或偏小的非线性结构响应的差别.

若考虑阻尼元件,则方程(6)为耗散系统,在强阻尼及临界阻尼条件下,方程的响应为一条衰减曲线,不再是振动问题;只有在弱阻尼条件下,方程的响应为一条振动曲线. 忽略非线性弹性元件时,方程  $\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\Omega t)$  在弱阻尼条件下的解为

$$x = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2\Omega^2}} \cos(\Omega t + \delta)$$

其中  $\delta$  满足  $\tan\delta = -2\mu\Omega/(\omega_0^2 - \Omega^2)$ , 如果考虑非线性弹性恢复力元件,则解的形式可以期望,在时间足够大时,响应的频率为  $\Omega$ , 振幅依赖于非线性项. 根据对方程(8)中非线性项的估计,作为最低级的近似  $O(\varepsilon)$ , 用下列线性强迫振动的方程来代替<sup>[22]</sup> 非线性强迫振动的 Duffing 方程

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = A\cos(\Omega t) \quad (11)$$

其中  $\omega$  为等效频率,  $A$  为外界激励的振幅. 方程(11)的解为

$$x = \frac{A}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2\Omega^2}} \cos(\Omega t + \delta) \quad (12)$$

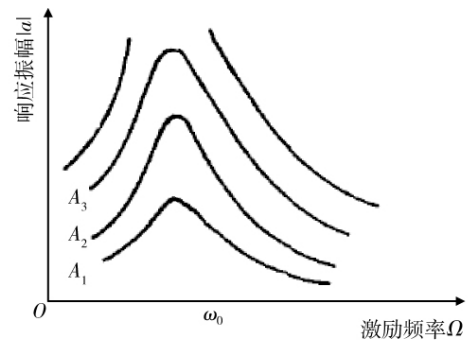
当  $\Omega$  与  $\omega_0$  值比较接近时,将等效频率式(9)代入

响应振幅  $a = \frac{A}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2\Omega^2}}$  中,得

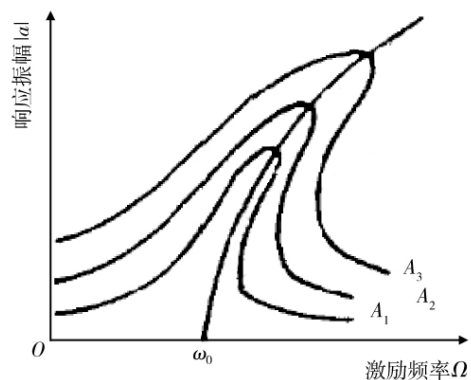
$$\left[ a(\omega_0^2 - \Omega^2) + \frac{3a^3}{4m}\eta \right]^2 + 4a^2\mu^2\Omega^2 = A^2 \quad (13)$$

非线性频响方程式(13)反映了非线性振动的频响、阻尼以及非线性特性之间的内在联系. 当非线性系数  $\eta = 0$  时,响应的振幅就退化成无非线性项的线性振动方程的响应振幅,如图 4(a). 当  $\eta > 0$  时, Duffing 方程的激励频率和响应振幅的

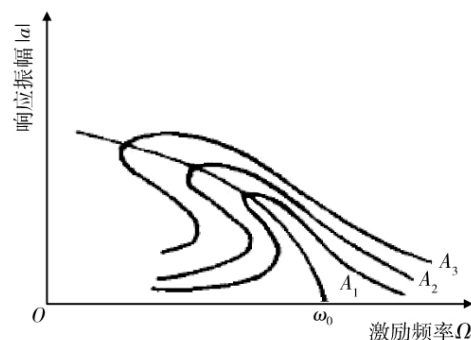
关系满足硬弹簧的频率响应特性,激励频率增加时,响应振幅的峰值随着激励振幅 ( $A_1 < A_2 < A_3$ ) 的增加而增大,峰值向右移动,如图 4(b). 反之,当  $\eta < 0$  时, Duffing 方程的激励频率和响应振幅的关系满足软弹簧的频率响应特性,激励频率减小时,响应振幅的峰值随着激励振幅的增加而增大,峰值向左移动,如图 4(c).



(a)  $\eta=0$



(b)  $\eta>0$



(c)  $\eta<0$

图4 Duffing 方程的频率响应曲线

Fig. 4 Amplitude-frequency curves of Duffing equation

当非线性系数  $\eta > 0$  时,若外界激励的频率  $\Omega$  从一个相对小的值开始逐渐增加,则响应的振幅  $a$  沿响应曲线逐渐增加,一直到达点 1; 当频率继

续增加时,振幅突然从点 1 跳跃到响应曲线较低分支的点 2 上,然后从点 2 开始沿响应曲线逐渐下降。反之,若  $\Omega$  减小时,响应振幅会出现上升的跳跃,如图 5(a)。同样地,当  $\eta < 0$  时也会出现类似的现象,只不过跳跃出现在相反方向,当  $\Omega$  增加时响应振幅有上升的跳跃,当  $\Omega$  减小时响应振幅有下降的跳跃。这种跳跃现象称为突变<sup>[16]</sup>。若发生上升跳跃和下降跳跃的外界激励  $\Omega$  值不相等,就会形成 1-2-3-4 的回路,这样的回路就称为滞后现象,如图 5(b)。

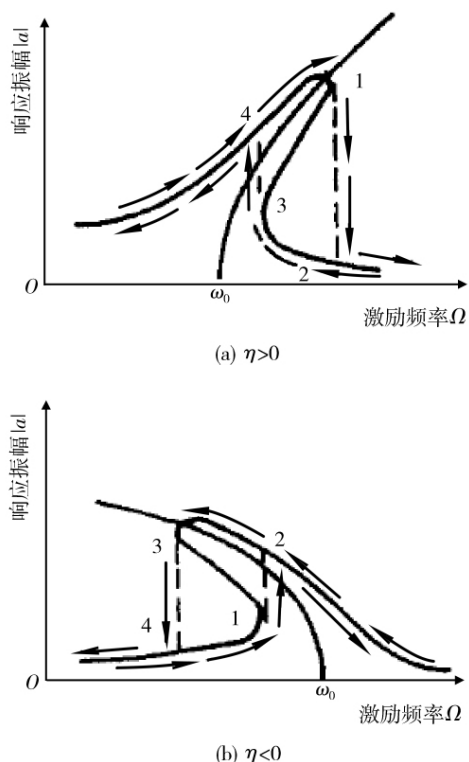


图 5 突变和滞后现象

Fig. 5 Amplitude jump and hysteresis

#### 4 单圆盘转子非线性振动实验

单圆盘转子实验台的结构如图 6 所示,转子安装在轴承支座上,转子与电机通过联轴器连接。相关的结构参数分别为:圆盘半径  $r_0 = 0.039$  m,圆盘质量  $m = 0.5$  kg,转轴半径  $r = 0.005$  m,圆盘及转轴材质为 Q235 钢,密度  $\rho = 7.8 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>,弹性模量  $E = 200$  GPa,泊松比为 0.3,转子跨距  $l = 0.4335$  m。在靠近右侧轴承处安装水平和竖直方向的电涡流传感器采集  $x$  和  $y$  方向的振动信号,在联轴器处安装键相电涡流传感器测量转速。振动测试系统如图 7 所示,采样频率为 5000 Hz。

选择圆盘位于距左侧轴承较近的位置  $a =$

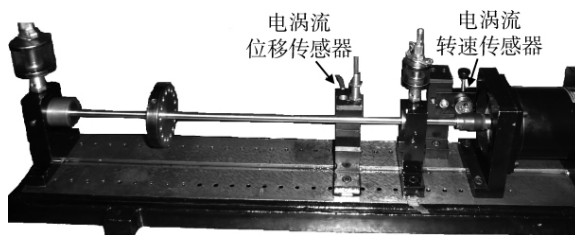


图 6 实验台结构

Fig. 6 Rotor test-bed

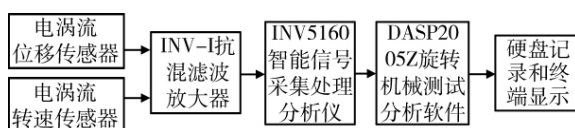


图 7 实验设备连接及测试系统示意图

Fig. 7 Test equipment connection and test system

0.13005 m,采用调节调速电机可以直接控制转子转速,分别对转子升降速过程进行测试。在转子升降速实验中,转子从 0 r/min 开始升速直至 9714 r/min,然后再降速至 0 r/min。因此,通过转子在升、降速过程中过临界转速的振动响应,就能够识别共振、涡动、振荡<sup>[23]</sup>等典型故障特征。

##### 4.1 频谱结构特征

转子在升、降速过程中非线性振动的频谱结构特性如图 8 所示,其中横坐标表示频率,纵坐标表示运行时间,谱图颜色的深浅变化表示转子振幅的大小,颜色越亮表示振幅越大。该图表明:在整个起停过程中,转子振动存在明显的同频共振区 A、随转子工作转速而变化的油膜涡动区 B 和不随转子工作转速而变化的油膜振荡区 C 的频谱结构特征,并且在升速过程中,转子转速过临界峰值后出现转速突升的现象,发生油膜振荡时出现涡动频率突降的锁频现象。

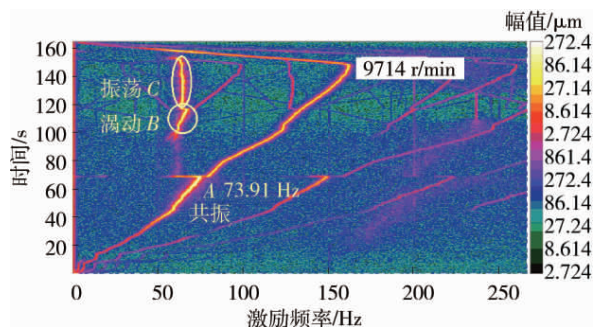


图 8 转子升降速的时间-幅值-频率三维谱图

Fig. 8 Time-amplitude-frequency spectrum of rotor lifting process

转子工作转速在  $8\,030 \sim 9\,714 \text{ r/min}$  范围时,轴系发生油膜振荡现象,相应的振荡频率范围是  $62.59 \sim 64.59 \text{ Hz}$ ;升、降速过程的一阶弯曲临界转速峰值频率分别为  $73.91, 60.59 \text{ Hz}$ ;转子在升速的  $7\,391 \sim 9\,714 \text{ r/min}$  范围和降速的  $9\,714 \sim 8\,470 \text{ r/min}$  范围内时,发生油膜半速涡动现象,相应的涡动频率分别为  $61.26 \sim 66.58 \text{ Hz}, 62.59 \sim 60.59 \text{ Hz}$ .

#### 4.2 非线性振动特性分析

图9给出了转子升、降转速通过一阶临界转速的幅频特性曲线,显然,根据频响方程(13)式及图5(a)可知,实验转子振动满足非线性系数大于零( $\eta > 0$ )的硬弹簧特性,因此产生在升速到  $4\,459 \text{ r/min}$  时振幅突降,降速到  $4\,268 \text{ r/min}$  时振幅突升的突变与滞后现象。

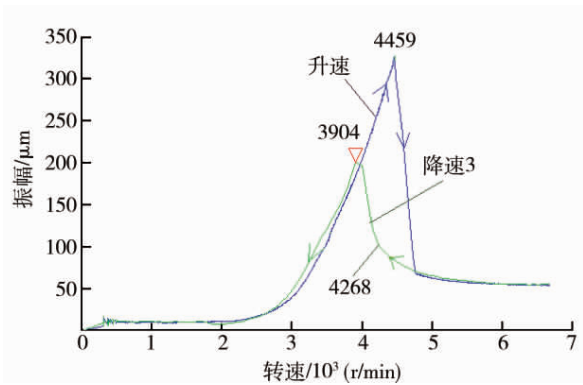


图9 转子振动突变与滞后特性

Fig. 9 Amplitude jump and hysteresis characteristics of rotor vibration

图10给出了转子在升速过程中,典型的一阶临界转速、分岔与混沌的轴心轨迹和幅频特性曲线。

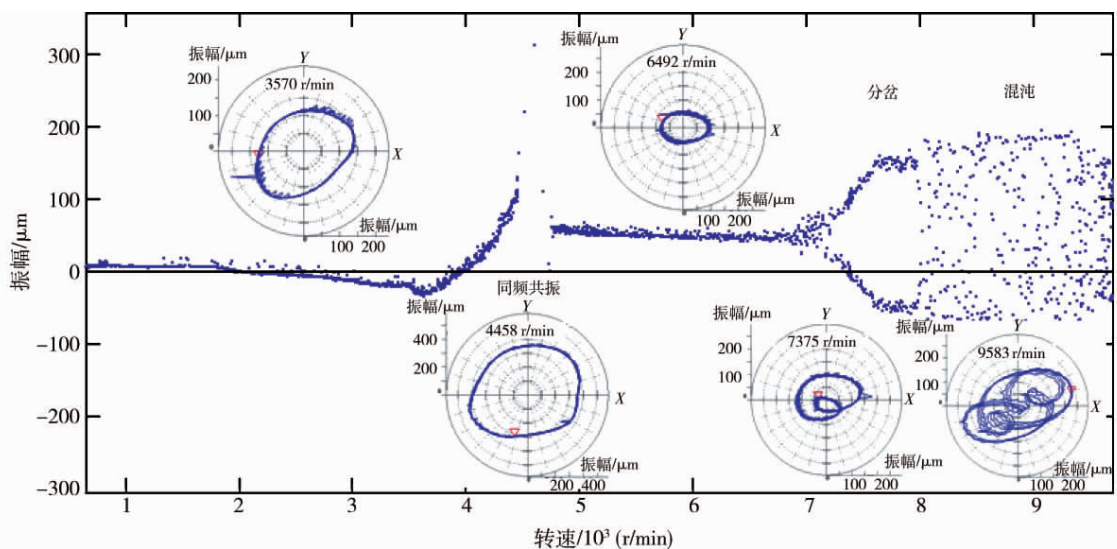


图10 转子过临界转速、分岔与混沌的轴心轨迹及幅频特性

Fig. 10 Shaft orbits and amplitude-frequency characteristics of rotor vibration through critical speed, bifurcation and chaos

从图10中可以看出:转子在同频振动、共振和  $1/2$  次谐波分岔、 $1/5$  次谐波振荡的典型转速 ( $3\,570, 4\,458, 7\,375, 9\,583 \text{ r/min}$ ) 下的轴心轨迹,分别为周期1 ( $< 7\,000 \text{ r/min}$ )、周期2 ( $7\,000 \sim 8\,000 \text{ r/min}$ ) 和周期5 ( $> 8\,000 \text{ r/min}$ ) 的运动特征。显然,当转子涡动频率接近转子一阶固有频率时,  $1/5$  次谐波振荡状态仍然具有两个频率,并且是低频振幅高于工频振幅的锁频特性。

## 5 结论

本文应用非线性振动学的基本原理,构建了转子非线性振动具有 Duffing 方程形式的力学

模型,推导了非线性系统的等效频率和频响方程,研究了共振、突变、滞后等非线性现象的机理。结合单圆盘转子振动实验,针对转子在升、降速过程中的非线性振动机理开展了较为深入的实验研究,验证了非线性振动模型结构与 Duffing 方程求解及频响方程的合理性。主要结论归结为以下几点:

1) 根据非线性振动学的基本原理以及结构刚度、阻尼、非线性元件的力学性质,结合大扰动、大变形的弹性假设,构建了具有 Duffing 方程形式的转子非线性振动模型。依据 Duffing 方程的解析解,定义了非线性频率  $\omega_\gamma$  参数,给出了系

统等效频率  $\omega$  等于线性频率  $\omega_0$  与非线性频率  $\omega_\eta$  两者之和的结论; 推导了系统非线性振动的频响方程, 从而阐明了在硬、软非线性频率  $\omega_\eta$  条件下, 激励频率与响应振幅之间的变化规律, 进一步揭示了系统产生共振、突变、滞后等非线性振动现象的机理。

2) 结合单圆盘转子非线性振动的实验结果, 基于 DASP 软件对转子非线性振动的轴心轨迹图、分岔图、幅频曲线等非线性特性进行分析, 进一步验证了单圆盘转子结构的非线性振动具有硬弹簧特性的突变与滞后特征, 论证了转子非线性振动模型结构与 Duffing 方程求解及频响方程的合理性与有效性, 揭示了转子低频涡动与谐波振荡的变化机理。

## 参考文献:

- [1] 杨金福, 杨昆, 于达仁. 非线性动态油膜力及  $\pi$  油膜力分解的特性研究[J]. 动力工程, 2005, 25(6): 770-779.  
YANG Jinfu, YANG Kun, YU Daren. Characteristics of nonlinear dynamic oil film forces and the decomposition of  $\pi$  oil film forces[J]. Journal of Power Engineering, 2005, 25(6): 770-779. (in Chinese)
- [2] 杨金福, 陈策, 袁平, 等. 浮环轴承非线性耦合动力润滑特性[J]. 航空动力学报, 2009, 24(2): 365-370.  
YANG Jinfu, CHEN Ce, YUAN Ping, et al. Research on nonlinear fluid-solid interaction dynamic lubrication in floating ring bearings[J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(2): 365-370. (in Chinese)
- [3] 张志禹, 王月玲, 汪文秉, 等. 碰摩信号的小波表示及其相空间特征研究[J]. 西安交通大学学报, 2001, 35(10): 1042-1049.  
ZHANG Zhiyu, WANG Yuelin, WANG Wenbing, et al. Characteristics of rub-impact signal in phase space[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2001, 35(10): 1042-1049. (in Chinese)
- [4] Czołczynski K, Kapitaniak T, Perlikowski P, et al. Periodization of Duffing oscillators suspended on elastic structure: mechanical explanation[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2007, 32(3): 920-926.
- [5] 张根辈, 臧朝平. 非线性系统参数识别的振动测试新方法[C]//第十三届全国非线性振动会议文集. 天津: 中国振动工程学会, 2011: 1-6.
- [6] 张根辈, 臧朝平. 通过振动测试识别非线性参数的几个问题[C]//第十三届全国非线性振动会议论文集. 天津: 中国振动工程学会, 2011: 1-9.
- [7] 张根辈, 臧朝平. 非线性和不确定性对结构动力学分析的影响[C]//第十三届全国非线性振动会议论文集. 天津: 中国振动工程学会, 2011: 1-11.
- [8] 李宏坤, 赵利华, 张志新, 等. 非线性刚度转子轴承支承松动故障的特征分析[C]//第十三届全国非线性振动会议论文集. 天津: 中国振动工程学会, 2011: 1-6.
- [9] 张锁怀, 石守红, 丘大谋. 齿轮耦合的转子-轴承系统的非线性模型[J]. 机械科学与技术, 2001, 20(2): 191-193.  
ZHANG Suohuai, SHI Shouhong, QIU Damou. A nonlinear model for dynamic analysis of a geared rotor-bearing system[J]. Mechanical Science and Technology, 2001, 20(2): 191-193. (in Chinese)
- [10] 袁振伟, 储福磊, 郝如江. 一种基于综合泄漏流机制的涡轮转子流固耦合模型[J]. 工程力学, 2006, 23(12): 165-170.  
YUAN Zhenwei, CHU Fulei, HAO Rujiang. A fluid-structure interaction model of turbine rotors based on a comprehensive leakage flow mechanism[J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(12): 165-170. (in Chinese)
- [11] 马锐, 陈予恕. 齿轮裂纹故障的非线性机理研究[C]//第十三届全国非线性振动会议文集. 天津: 中国振动工程学会, 2011, 141-08: 1-9.
- [12] 李明, 阿梅. 具有轴承不对中的多跨柔性转子系统非线性动力学研究[C]//第十三届全国非线性振动会议文集. 天津: 中国振动工程学会, 2011: 1-9.
- [13] 郭虎伦, 陈予恕. 含间隙和立方非线性二元机翼的解析分析[C]//第十三届全国非线性振动会议文集. 天津: 中国振动工程学会, 2011: 1-8.
- [14] 王莉, 宋晓峰, 孟小利, 等. 用支持矢量机建立电励磁双凸极发电机的非线性模型[J]. 电工技术学报, 2004, 19(9): 1-5.  
WANG Li, SONG Xiaofeng, MENG Xiaoli, et al. Nonlinear modeling of fielding-winding doubly salient generator by support vector machine[J]. Transactions of Electrotechnical Society, 2004, 19(9): 1-5. (in Chinese)
- [15] 刘秉正, 彭建华. 非线性动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [16] 周纪卿, 朱因远. 非线性振动[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1998.
- [17] 闻邦椿, 李以农, 徐培民, 等. 工程非线性振动[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [18] 杨金福, 刘占生, 于达仁, 等. 滑动轴承非线性油膜力研究[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2003, 35(3): 257-260.  
YANG Jinfu, LIU Zhansheng, YU Daren, et al. Nonlinear film-force of journal bearing[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2003, 35(3): 257-260. (in Chinese)
- [19] 杨金福, 杨昆, 于达仁, 等. 滑动轴承非线性油膜力研究[J]. 振动工程学报, 2005, 18(1): 118-123.  
YANG Jinfu, YANG Kun, YU Daren, et al. Study on nonlinear oil film force of journal bearing[J]. Journal of Vibration Engineering, 2005, 18(1): 118-123. (in Chinese)
- [20] YANG Jinfu, YANG Shengbo, CHEN Ce, et al. Experimental research on the frequencies coupling modulation active control of hybrid gas bearings and rotor system[C]//Proceedings of ASME Turbo. Expro. 2009, USA: ASME, 2009: 1-7.
- [21] YANG Jin, CHEN Ce, LIU Yuhan, et al. Engineering stability criterion and its experimental validation of frequency coupled modulation for sliding rotor-bearing system[C]//

- Proceedings of the 8th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics. Korea, Seoul: KIST, 2010: 754-761.
- [22] 刘式适, 刘式达, 谭本旭. 非线性大气动力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1996.
- [23] 杨金福, 杨昆, 付忠广, 等. 转子滑动轴承系统中油膜谐波振荡过程的试验研究[J]. 燃气涡轮试验与研究, 2007, 20(3): 42-47.
- YANG Jinfu, YANG Kun, FU Zhongguang, et al. Experimental research on the harmonic oil whip in sliding bearing-rotor system[J]. Gas Turbine Experiment and Research, 2007, 20(3): 42-47. (in Chinese)